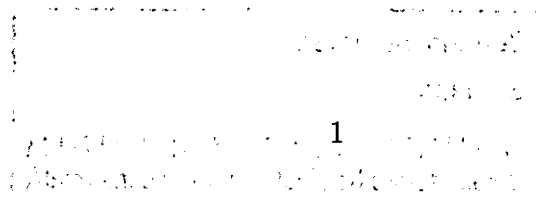


Lagrange-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines auf Triangulierungen

Gero Hecklin

Nr. 275/2003



Lagrange-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines auf Triangulierungen

Gero Hecklin

Institut für Mathematik, Universität Mannheim
68131 Mannheim, Mai 2003

Zusammenfassung

Wir entwickeln eine Methode zur Lagrange-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen Δ , bei der keine Dreiecke von Δ unterteilt werden. Solche Triangulierungen sind charakterisiert durch die Existenz einer Teilmenge $\Delta_s \subset \Delta$ disjunkt liegende Dreiecke, sodass jeder innere Knoten geraden Grades Eckpunkt genau eines Dreiecks in Δ_s ist. Unter Verwendung von Pfaden ordnen wir die Knoten von Δ in eine geeignete Reihenfolge. Darauf basierend konstruieren wir Lagrange-Interpolationspunkte für den Splineraum $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$.

AMS Subject Classification: 65D05, 65D07, 41A63, 41A15

Keywords: Bivariate Splines, Triangulierungen, Lagrange-Interpolation.

1. Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir den Raum der bivariaten C^r -Splines vom Grad q auf einer Triangulierung Δ eines polygonalen Grundgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}.$$

Dabei ist $\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$ der Raum der bivariaten Polynome vom totalen Grad q und $C^r(\Omega)$ die Menge aller r mal differenzierbaren Funktionen auf Ω . Grundlegende Probleme in der Theorie der bivariaten Splineinterpolation sind die Bestimmung der Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ und die Konstruktion von Interpolationsmengen für diese Splineräume. Eine Menge $L = \{z_1, \dots, z_m\}$, wobei m die Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ ist, heißt

Lagrange-Interpolationsmenge für den Spliner Raum $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, falls zu jeder Funktion $f \in C(\Omega)$ genau ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ mit

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

existiert. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f interpoliert, und ist die Gesamtanzahl der Bedingungen gleich m , so sprechen wir von einer Hermite-Interpolationsmenge.

In der Literatur gibt es eine Reihe von Methoden zur Interpolation mit Splines von hohem Polynomgrad q relativ zur Differenzierbarkeitsordnung r . Morgan und Scott [18] bestimmten auf beliebigen Triangulierungen Δ die Dimension und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$. Diese Ergebnisse wurden von Alfeld, Piper und Schumaker [3], basierend auf Resultaten von Alfeld und Schumaker [2], für C^r -Splines vom Grad $q \geq 4r + 1$ verallgemeinert. Hong [15] untersuchte Splineräume vom Grad $q \geq 3r + 2$ und berechnete deren Dimension für beliebige Triangulierungen. Dieses Resultat wurde von Ibrahim und Schumaker [16] für Supersplineräume verallgemeinert. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [11] entwickelten einen Algorithmus zur Konstruktion von lokalen Hermite-Interpolationsmengen mit optimaler Approximationsordnung für diese Räume.

Für niedrigeren Polynomgrad, d.h. $q < 3r + 2$, führt die Untersuchung bivariater Splines auf komplexe, bisher nicht vollständig gelöste Probleme. Alfeld, Piper und Schumaker [1] bestimmten die Dimension von $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ für beliebige Triangulierungen Δ . Ihre nichtlokalen Argumente der Graphentheorie liefern jedoch i.A. keine Interpolationsmengen für diese Splineräume. Chui und Hong [7,8] gaben darauf aufbauend zwei Algorithmen an, die auf beliebigen Triangulierungen Δ mit geeigneten Clough-Tocher-Splits bzw. Diagonalenwechsel in konvexen Vierecken optimale Approximationsordnung der Quasi-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines ergeben. Später entwickelte Gao [14] eine Methode zur Hermite-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines auf Triangulierungen, bei denen jeder innere Knoten ungeraden Grad besitzt. Davydov und Nürnberger [10] konstruierten, ebenfalls für $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$, induktiv Interpolationsmengen auf der Klasse der beliebigen Triangulierungen Δ , bei denen in Ausnahmefällen die Triangulierung modifiziert wird. Für die Klasse der regelmäßigen Rechteckszerlegungen Δ^1 und Δ^2 , mit einer bzw. zwei Diagonalen in jedem Rechteck, konstruierten Nürnberger und Riessinger [20] für beliebige q und r Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^r(\Delta^i)$, $i \in \{1, 2\}$. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [9] entwickelten eine Methode zur Interpolation mit kubischen C^1 -Splines auf Nested Polygon-Triangulierungen, d.h. Triangulierungen ineinander geschachtelter geschlossener Polygonzüge. Eine Reihe von weiteren Methoden zur Lagrange-Interpolation mit kubischen C^1 -Splines auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen wurden kürzlich von Nürnberger und Zeilfelder [22,25] bzw. Nürnberger, Schumaker und Zeilfelder [26,27] beschrieben. Darüber hinaus entwickelten Nürnberger und Zeilfelder [24] eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit C^1 -Splines vom Grad ≥ 3 auf beliebigen Triangulierungen, die optimale Approximationsordnung besitzt. Dabei werden etwa die Hälfte der Dreiecke der Triangulierung unterteilt. Wenig später konstruierte Kohlmüller [17] auf beliebigen Triangulierungen Δ Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 3$, mit fast optimaler Approximationsordnung, wobei i.A. nur etwa ein Viertel der Dreiecke von Δ gesplittet werden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Methode zur Lagrange-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines auf allgemeinen Klassen \mathcal{T} von Triangulierungen Δ zu entwickeln, bei der keine Dreiecke der Triangulierung unterteilt werden. Solche Triangulierungen Δ , zu denen auch die regelmäßigen Rechteckszerlegungen Δ^1 und Δ^2 gehören, sind dadurch charakterisiert, dass es eine Teilmenge $\Delta_s \subset \Delta$ gibt, sodass jeder innere Knoten geraden Grades von Δ Eckpunkt genau eines Dreiecks in Δ_s oder zweier benachbarter Dreiecke in Δ_s ist. Nach der Definition der Teilmenge Δ_s konstruieren wir unter Verwendung einer Verallgemeinerung der Methode von Alfeld, Piper und Schumaker [1] geeignete Pfade für die Knoten der Triangulierung, wodurch insbesondere eine Reihenfolge der Knoten festgelegt wird. Darauf aufbauend wählen wir Punkte auf den Dreiecken von Δ , die eine eindeutige Lagrange-Interpolation mit $S_4^1(\Delta)$ ermöglichen.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 erläutern wir einige Grundlagen über bivariate Polynome und Splines sowie Interpolation mit Splineräumen. Die Klasse \mathcal{T} der für die Interpolation mit $S_4^1(\Delta)$ geeigneten Triangulierungen Δ sowie die dafür notwendigen Pfade werden in Abschnitt 3 algorithmisch festgelegt. Darauf aufbauend konstruieren wir in Abschnitt 4 Lagrange-Interpolationsmengen für quartische C^1 -Splines.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel erläutern wir einige Grundlagen über Triangulierungen, bivariate Polynome und Splines, sowie Interpolation mit bivariaten Splines, die auf Alfeld, Piper und Schumaker [1], Nürnberger [19], Schumaker [28] u.a. zurückgehen.

Definition 2.1:

Sei Ω , eine einfach zusammenhängende, nicht notwendigerweise konvexe, polygonale Teilmenge des \mathbb{R}^2 , zerlegt in Dreiecke T_1, \dots, T_N , sodass der Durchschnitt zweier verschiedener Dreiecke entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante ist. Dann heißt $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine TRIANGULIERUNG VON Ω . Ist $\Delta' \subset \Delta$ eine Triangulierung einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$, so heißt Δ' SUBTRIANGULIERUNG VON Δ .

Im Folgenden setzen wir

$V_I(\Delta), V_B(\Delta), V(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Knoten,
$E_I(\Delta), E_B(\Delta), E(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Kanten,
$N(\Delta)$: Menge der Dreiecke, und
$\sigma(\Delta)$: Menge der singulären Knoten

der Triangulierung Δ . Dabei gelten folgende wohlbekannten Beziehungen:

$$\begin{aligned} \#E_B(\Delta) &= \#V_B(\Delta), \\ \#E_I(\Delta) &= 3 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 3, \\ \#N(\Delta) &= 2 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 2. \end{aligned}$$

Eine Kante $e := [v_1, v_2] \in E(\Delta)$ heißt DEGENERIERT im Endpunkt v_1 , falls die beiden benachbarten Kanten im Knoten v_1 gleiche Steigung besitzen. Andernfalls heißt e NICHT-DEGENERIERT in v_1 . Ein Knoten $v \in V_I(\Delta)$ heißt SINGULÄR, falls es genau vier Kanten mit Endpunkt v gibt, und diese auf zwei Geraden liegen (vgl. Abbildung 1).

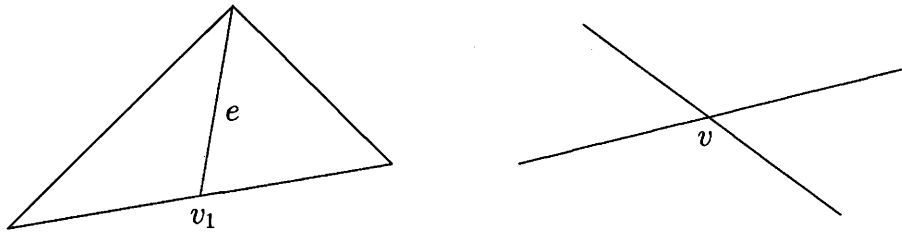


Abb. 1: In v_1 degenerierte Kante e , singulärer Knoten v .

Für einen Knoten $v \in V(\Delta)$ definiert $\text{Grad}(v)$ die Anzahl der Kanten in Δ mit Endpunkt v . Die Subtriangulierung $\Delta_v := \{T \in \Delta \mid v \in T\}$ von Δ , die alle Dreiecke mit Eckpunkt v enthält, bezeichnen wir als ZELLE VON v .

Definition 2.2:

Seien $r, q \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < q$ und eine Triangulierung Δ gegeben. Dann heißt

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}$$

der SPLINERAUM der r mal differenzierbaren Funktionen vom Grad q . Dabei ist

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$$

der $\binom{q+2}{2}$ dimensionale Raum der BIVARIATEN POLYNOME vom totalen Grad $\leq q$, und $C(\Omega)$ die Menge aller r mal differenzierbaren Funktionen auf Ω .

Funktionen aus $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ sind also stückweise Polynome vom Grad q , die r mal stetig differenzierbar über den Kanten von Δ verknüpft sind.

Ein grundlegendes Problem der bivariaten Splinetheorie ist neben der Bestimmung der Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ die Konstruktion von Interpolationsmengen für diese Splineräume. Eine Menge $L = \{z_1, \dots, z_m\}$, wobei m die Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ ist, heißt Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, falls zu jeder Funktion $f \in C(\Omega)$ genau ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ mit

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

existiert. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f interpoliert, und ist die Gesamtanzahl der Bedingungen gleich m , so sprechen wir von einer HermiteInterpolationsmenge.

Nach Alfeld, Piper und Schumaker [1] ist für beliebige Triangulierungen Δ die Dimension des Splineraums $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ bekannt. Es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta)) = 4 \cdot \#V_B(\Delta) + 3 \cdot \#V_I(\Delta) + \sigma + \#E(\Delta) = 6 \cdot \#V(\Delta) + \sigma - 3.$$

Für einen Einheitsvektor $d \in \mathbb{R}^2$ und eine genügend oft differenzierbare Funktion f bezeichnen wir mit $f_d(z)$ die partielle Ableitung von f im Punkt z in Richtung d . Sind d_1 und d_2 linear unabhängige Einheitsvektoren, so heißt

$$D^w f(z) = (f_{d_1^w}(z), f_{d_1^{w-1}d_2}(z), \dots, f_{d_1d_2^{w-1}}(z), f_{d_2^w}(z))$$

der GEORDNETE VEKTOR DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN vom Grad w .

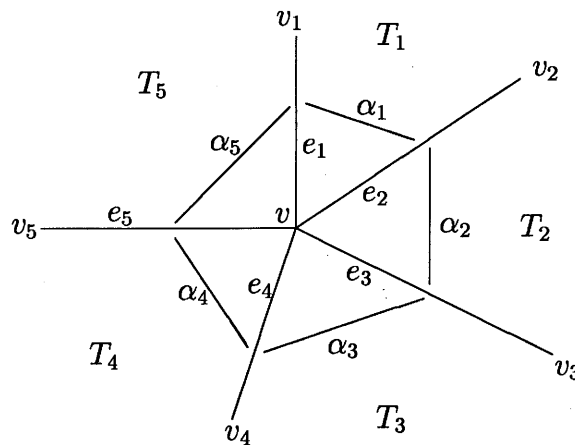


Abb. 2: Beispiel eines Knotens vom Grad 5.

Im Folgenden beweisen wir eine wichtige Eigenschaft bivariater C^1 -Splines für Knoten ungeraden Grades. Sei $v \in V_I(\Delta)$ ein Knoten ungeraden Grades $n \in \mathbb{N}$, im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten v_i , $i = 1, \dots, n$ durch Kanten $e_i := [v, v_i]$. Ferner sei d_i für $i = 1, \dots, n$ ein Einheitsvektor entlang der Kante e_i , $\Delta_v := \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$, $v_{n+1} = v_1$, die Zelle von v , α_i für $i = 1, \dots, n$ der von e_i und e_{i+1} eingeschlossene Winkel (vgl. Abbildung 2) und der Spline $s \in \mathcal{S}_4^1(\Delta_v)$ gegeben durch $s|_{T_i} \equiv p^{[T_i]}$, $i = 1, \dots, n$.

Lemma 2.3:

Aus $p_{d_i^2}^{[T_i]}(v) = 0$ für $i = 1, \dots, n$ folgt $p_{d_i d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis:

Sind alle Kanten e_i , $i = 1, \dots, n$ in v nichtdegeneriert, so gilt

$$\sin(\alpha_i + \alpha_{i+1}) p_{d_{i+1}^2}^{[T_i]} = \sin(\alpha_i) p_{d_{i+1} d_{i+2}}^{[T_{i+1}]} + \sin(\alpha_{i+1}) p_{d_i d_{i+1}}^{[T_i]}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir setzen $a_i := \sin(\alpha_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Durch die C^1 -Stetigkeit über den inneren Kanten

von Δ_v lässt sich damit folgendes lineare Gleichungssystem aufstellen.

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{d_1 d_2}^{[T_1]} \\ p_{d_2 d_3}^{[T_2]} \\ \vdots \\ p_{d_{n-1} d_n}^{[T_{n-1}]} \\ p_{d_n d_1}^{[T_n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante D der Koeffizientenmatrix lautet

$$D = \prod_{i=1}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i = 2 \prod_{i=1}^n a_i.$$

Ist eine Kante e_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ in v degeneriert, so gilt $p_{d_{j-1} d_j}^{[T_{j-1}]} = -p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}$, und damit

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{d_1 d_2}^{[T_1]} \\ \vdots \\ p_{d_{j-1} d_j}^{[T_{j-1}]} \\ p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]} \\ \vdots \\ p_{d_n d_1}^{[T_n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $\sin(\alpha_{j-1}) = \sin(\pi - \alpha_j) = \sin(\alpha_j)$ folgt dann

$$D = \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i = 2 \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i.$$

Aus $\alpha_i \in (0, \pi)$ für $i = 1, \dots, n$ folgt $D > 0$ und damit die Behauptung.

#

3. Festlegung der Klasse \mathcal{T}

Im Folgenden definieren wir eine allgemeine Klasse \mathcal{T} von Triangulierungen, die für die Lagrange-Interpolation mit quartischen C^1 -Splines geeignet sind. Solche Triangulierungen Δ sind charakterisiert durch die Existenz einer Teilmenge $\Delta_s \subset \Delta$ geeigneter Dreiecke, so dass jeder innere Knoten geraden Grades Eckpunkt genau eines Dreiecks in Δ_s oder zweier benachbarter Dreiecke in Δ_s ist. Nach der Festlegung von Δ_s wählen wir algorithmisch in einer Verallgemeinerung der Methode von Alfeld, Piper und Schumaker [1] geeignete Pfade für die Knoten der Triangulierung, wodurch wir insbesondere eine Reihenfolge der Knoten

definieren.

Definition 3.1:

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Gibt es eine Teilmenge $\Delta_s \subset \Delta$, sodass für jeden Knoten $v \in V_I(\Delta)$ geraden Grades entweder

- 1.) genau ein Dreieck $T \in \Delta_v$ in Δ_s liegt, oder
- 2.) genau zwei benachbarte Dreiecke $T_1, T_2 \in \Delta_v$ in Δ_s liegen,

so setzen wir $\Delta \in \mathcal{T}$, und bezeichnen Δ_s als EINFÄRBUNG von Δ . Anderfalls gilt $\Delta \notin \mathcal{T}$. Dabei bezeichnet Δ_v die Zelle von v , d.h. die Menge aller Dreiecke in Δ mit Eckpunkt v .

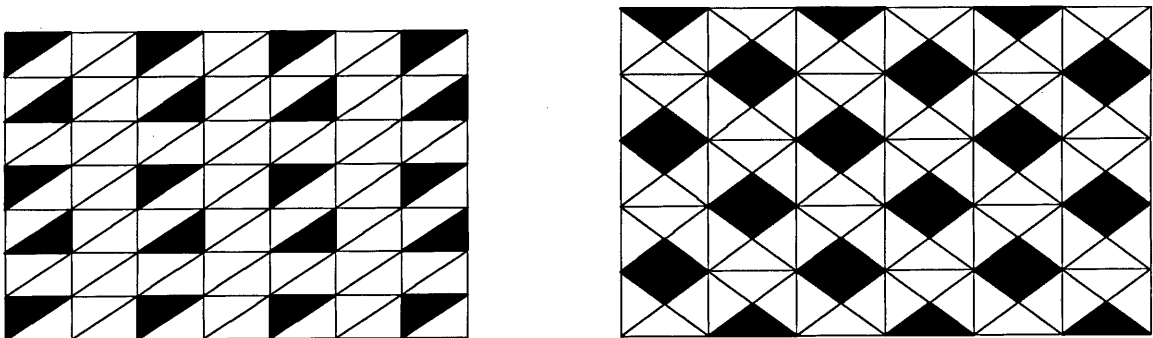


Abb. 3: Mögliche Einfärbungen der Triangulierungen Δ^1 und Δ^2 .

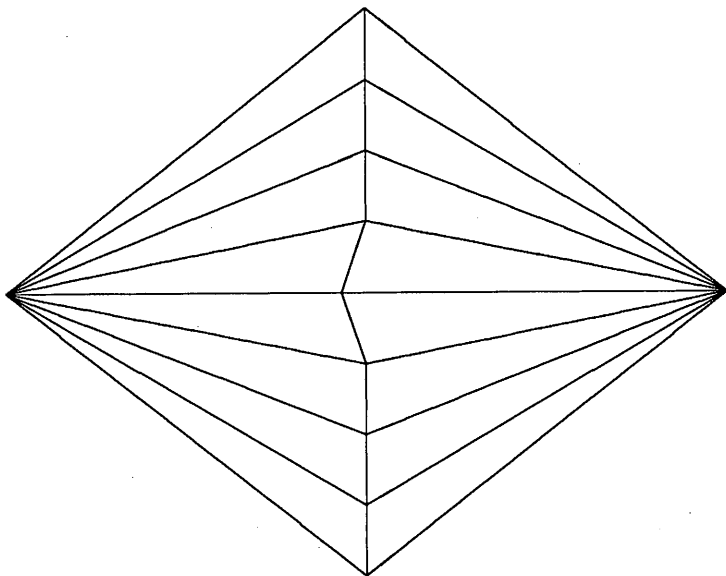


Abb. 4: Nicht einfärbbare Triangulierung mit Knoten vom Grad 4.

Beispiele 3.2:

- Die regelmäßigen Rechteckszerlegungen Δ^1 und Δ^2 mit einer bzw. zwei Diagonalen in jedem Rechteck repräsentieren den schlechtesten Fall, da alle inneren Knoten geraden Grad besitzen und somit berücksichtigt werden müssen. Eine mögliche Einfärbung dieser Triangulierungen zeigt Abbildung 3.
- Abbildung 4 zeigt eine Triangulierung, die nicht in \mathcal{T} liegt. In diesem Beispiel ist es nicht möglich mehr als zwei mal zwei benachbarte Dreiecke für Δ_s zu wählen. Damit ist in mindestens einer Zelle eines inneren Knotens geraden Grades kein Dreieck in Δ_s enthalten.
- Abbildung 8 zeigt eine exemplarischen Triangulierung. Für diese Triangulierung können geeignete Dreiecke für Δ_s disjunkt ausgewählt werden, es ist nicht notwendig zwei benachbarte Dreiecke zu wählen.
- Jede separable Triangulierung ist einfärbbar. Eine Triangulierung Δ heißt SEPARABEL, wenn es eine Teilmenge $\Delta_0 \subset \Delta$ gibt, sodass jeder Knoten der Triangulierung Eckpunkt genau eines Dreiecks in Δ_0 ist (vgl. Nürnberger und Zeilfelder [26]).

Für die Lagrange-Interpolation mit dem Splineraum $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{T}$, konstruieren wir nun eine Menge von Pfaden, die jeden inneren nichtsingulären Knoten v , der Eckpunkt eines Dreiecks in Δ_s ist, über eine in v nichtdegenerierte Kante mit einem Randknoten, singulären Knoten, Knoten ungeraden Grades, der nicht Eckpunkt eines Dreiecks in Δ_s ist, oder mit einem Knoten für die zuvor schon ein Pfad konstruiert wurde, verbindet. Sei $d := \#V(\Delta)$, dann ordnen wir die Knoten der Triangulierung Δ . Wir setzen

- $V_{in} := \{v_1, \dots, v_n\}$ die Menge aller inneren nichtsingulären Knoten von Δ , die Eckpunkt mindestens eines Dreiecks in Δ_s sind,
- v_{n+1}, \dots, v_m alle inneren Knoten ungeraden Grades, die nicht Eckpunkt eines Dreiecks in Δ_s sind,
- v_{m+1}, \dots, v_p alle singulären Knoten der Triangulierung,
- v_{p+1}, \dots, v_t , $t > p$ alle Randknoten von Δ , die Eckpunkt mindestens eines Dreiecks in Δ_s sind, und
- v_{t+1}, \dots, v_d im Uhrzeigersinn alle Randknoten von Δ , die nicht Eckpunkt eines Dreiecks in Δ_s sind. Dabei ist v_{t+1} ein benachbarter Knoten eines Knotens v_{p+1}, \dots, v_t .

Für zwei benachbarte Dreiecke $T_1 = \Delta(v_1, v_2, u)$, $T_2 = \Delta(v_1, v_2, w) \in \Delta_s$ gilt: Ist v_i , $i \in \{1, 2\}$ ein innerer, nichtsingulärer Knoten, und gibt es keine Kante der Triangulierung mit Endpunkt v_i , die in v_i nichtdegeneriert ist, und die nicht auf $T_1 \cup T_2$ liegt, so definieren wir v_i als NICHT NORMAL und wählen für diesen Knoten keinen Pfad (vgl. Abbildung 6). Andernfalls bezeichnen wir v_i als NORMAL.

Wir definieren nun geeignete Pfade und ordnen dadurch zusätzlich die Knoten in V_{in} . Sei dazu $V_{ok} = V(\Delta) \setminus V_{in}$.

Algorithmus 3.3:

Sei $\#V_{in} = n \in \mathbb{N}$. Dann wähle einen normalen Knoten $v_n \in V_{in}$, für den es eine in v_n nichtdegenerierte Kante a gibt, die v_n mit einem Knoten in V_{ok} verbindet. Markiere die Kante a als Pfad von v_n , setze $V_{ok} = V_{ok} \cup \{v_n\}$ sowie $V_{in} = V_{in} \setminus \{v_n\}$ und fahre mit der Auswahl von v_{n-1} fort.

Da alle Dreiecke bzw. Paare von Dreiecken in Δ_s disjunkt liegen, d.h. keine gemeinsamen Eckpunkte besitzen, gibt es i.A. immer genügend Alternativen zur Festlegung einer nichtdegenerierten Kante als Pfad. Es existieren jedoch Ausnahmesituationen, in denen bei sehr speziellen Konstellationen von Kanten und Knoten keine geeigneten Pfade festgelegt werden können. Abbildung 5 zeigt einige Beispiele solcher Konstellationen. In allen Fällen sind für die drei inneren Knoten, die Eckpunkt eines Dreiecks in Δ_s sind jeweils zwei Kanten in diesem Knoten degeneriert. Daher können hier Pfade nur zyklisch, nicht aber zu einem Knoten in V_{ok} gewählt werden. Um solche Ausnahmefälle zu vermeiden fordern wir als zusätzliche Bedingung an die Triangulierungen $\Delta \in \mathcal{T}$, dass jedes Dreieck $T \in \Delta$ mindestens einen Eckpunkt v besitzt, für den weniger als zwei in v degenerierte Kanten in $E(\Delta)$ existieren.

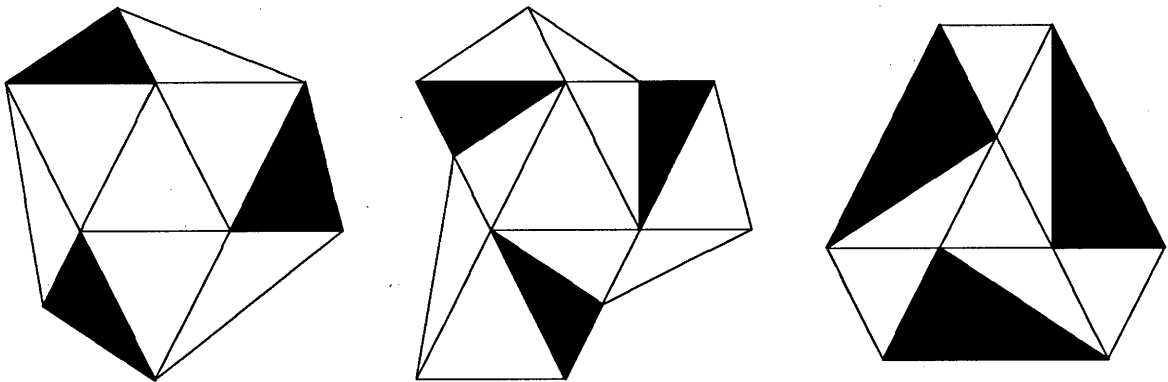


Abb. 5: Konstellationen ohne Möglichkeit für Pfade.

4. Lagrange-Interpolation

Unter Verwendung der in Abschnitt 3 definierten Pfade, der festgelegten Reihenfolge der Knoten der Triangulierung, sowie der Teilmenge $\Delta_s \subset \Delta$ konstruieren wir nun Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ auf Triangulierungen $\Delta \in \mathcal{T}$. Ein Dreieck $T = \Delta(u, v, w) \in \Delta$ heißt **RANDDREIECK** der Triangulierung, falls $u, v, w \in V_B(\Delta)$. Wir

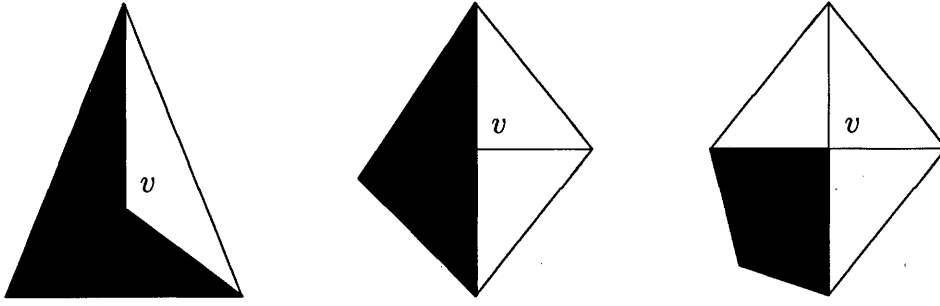


Abb. 6: Konstellationen mit nicht normalen Knoten v .

konstruieren zunächst Lagrange-Interpolationsmengen auf Triangulierungen $\Delta \in \mathcal{T}$ ohne Randdreiecke, und wählen anschließend in jedem Randdreieck genau sechs zusätzliche Punkte zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_2 (vgl. Nürnberger und Zeilfelder [22]).

Für einen Knoten $v_i \in V(\Delta)$, $i \in \{1, \dots, d\}$, mit $\text{Grad}(v_i) = n_i$ sei v_i im Uhrzeigersinn verbunden mit den Knoten $v_{i,j}$, $j = 1, \dots, n_i$ durch Kanten $e_{i,j} = [v_i, v_{i,j}]$. Ferner sei $d_{i,j}$ für $j = 1, \dots, n_i$ ein Einheitsvektor entlang der Kante $e_{i,j}$ und $\Delta_{v_i} = \{T_{i,j} = \Delta(v_i, v_{i,j}, v_{i,j+1}), j = 1, \dots, n_i\}$, $v_{i,n+1} = v_{i,1}$ die Zelle um v_i (vgl. Abbildung 2). Für einen Randknoten ent falle das Dreieck T_{i,n_i} . Falls vorhanden, sei e_{i,r_i} , $r_i \in \{1, \dots, n_i\}$ der Pfad von v_i . Wir wählen folgende Interpolationspunkte:

- 1.) 15 Punkte zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_4 , auf jedem einzelnen Dreieck in Δ_s ;
- 2.) für zwei benachbarte Dreiecke $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$, $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4) \in \Delta_s$ genau 15 Punkte wie in 1. auf T_1 , v_4 , je einen Punkt im Innern von $[v_1, v_4]$, $[v_2, v_4]$ und von T_2 , sowie einen weiteren Punkt im Innern von $[v_1, v_4]$ bzw. $[v_2, v_4]$, falls v_1 bzw. v_2 normal ist;
- 3.) genau einen Punkt im Innern jeder Kante in $E(\Delta)$, die nicht auf einem Dreieck in Δ_s liegt, und die kein Pfad ist;
- 4.) Für jeden Knoten $v_i = v_1, \dots, v_d$ wähle drei Punkte wie folgt:
 - v_i , je einen Punkt im Innern zweier Kanten e_{i,j_1} , $e_{i,j_2} \neq r_i$, falls $\Delta_{v_i} \cap \Delta_s = \emptyset$, und für v_i noch keine Punkte gewählt wurden,
 - für $j = 1, \dots, n_i$ wähle $v_{i,j}$, einen Punkt auf $e_{i,j}$ und einen Punkt auf einer Kante $[v_{i,j-1}, v_{i,j}]$, $[v_{i,j}, v_{i,j+1}]$, die kein Pfad ist, falls für $v_{i,j} \in \Delta_{v_i} \setminus V(\Delta_s)$ noch keine Punkte gewählt wurden. Sind $[v_{i,j-1}, v_{i,j}]$, $[v_{i,j}, v_{i,j+1}]$ beides Pfade mit $v_{i,j-1} = v_\mu$ und $v_{i,j+1} = v_\lambda$, $\mu < \lambda$ so wähle den dritten Interpolationspunkt im Innern von $[v_{i,j-1}, v_{i,j}]$ (vgl. Abbildung 7);
- 5.) einen Punkt im Innern von $T = \Delta(v, w_1, w_2) \in \Delta$, für jeden Knoten $v \in V_B(\Delta) \setminus V(\Delta_s)$, wobei $w_1 \in V_I(\Delta)$, $w_2 \in V_B(\Delta)$.

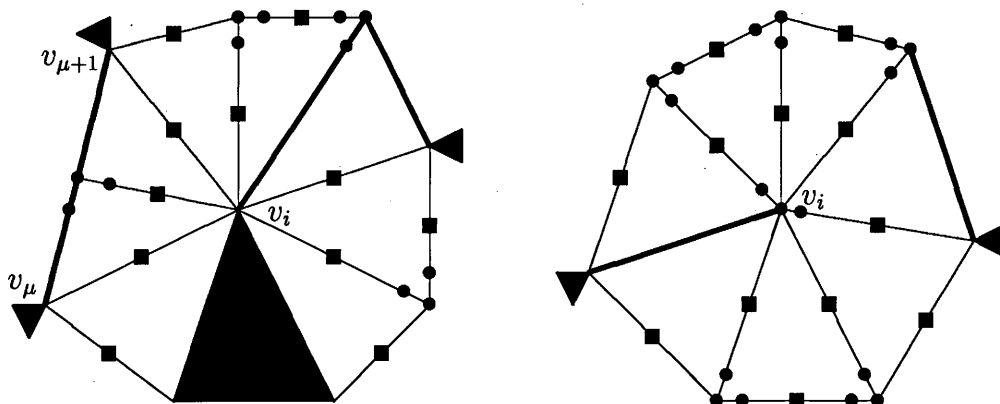


Abb. 7: Lagrangepunkte von 3.) ■ und 4.) • für einer Zelle.

Sei $\Delta \in \mathcal{T}$ und L die Menge alle oben gewählter Interpolationspunkte.

Theorem 4.1:

L ist eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass $\#L = \dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta))$. In L enthalten sind

- drei Punkte für jeden Knoten (1.), 2.), 4.)),
- ein Punkt für jede Kante, die kein Pfad ist, sowie genau ein zusätzlicher Punkt im Innern eines Dreiecks in Δ_s , für jede Kante, die ein Pfad ist (1.), 2.), 3.)),
- ein Punkt für jeden Randknoten (1.), 2.), 5.)), und
- ein Punkt für jeden inneren singulären Knoten (1.), 2.)).

Also gilt

$$\begin{aligned}
 \#L &= 3 \cdot \#V(\Delta) + \#E(\Delta) + \#V_B(\Delta) + \sigma \\
 &= 3 \cdot \#V(\Delta) + (3 \cdot \#V_I(\Delta) + 2 \cdot \#V_B(\Delta) - 3) + \#V_B(\Delta) + \sigma \\
 &= 6 \cdot \#V(\Delta) - 3 + \sigma \\
 &= \dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta)).
 \end{aligned}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also $s \in \mathcal{S}_4^1(\Delta)$ definiert durch $s|_T = p^{[T]} \in \mathcal{P}_4$ für alle $T \in \Delta$ und es gelte $s(z) = 0$ für alle $z \in L$. In jedem einzelnen Dreieck $T \in \Delta_s$ gilt nach Voraussetzung $p^{[T]} \equiv 0$ da $p^{[T]}$ eindeutige Lösung des homogenen Interpolationsproblems auf T ist. Seien $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$, $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4) \in \Delta_s$ zwei benachbarte Dreiecke in Δ_s , dann gilt mit

analogem Argument $p^{[T_1]} \equiv 0$. Sind v_1 und v_2 normal, so folgt mit den Interpolationspunkten auf den Kanten von T_2 und der C^1 -Stetigkeit über der Kante $[v_1, v_2]$ die Existenz eines Polynoms $q \in \mathcal{P}_0$, sodass sich $p^{[T_2]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T_2]}(z) = l_1^2 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot q(z), \quad z \in T_2,$$

wobei l_1 eine Gerade durch $[v_1, v_2]$ ist, und l_j , $j = 2, 3$ Geraden durch anderen beiden Kanten von T_2 sind. Der Interpolationspunkt im Innern von T_2 impliziert $q \equiv 0$ und damit $p^{[T_2]} \equiv 0$. Sei jetzt o.B.d.A. v_1 nicht normal, v_2 normal (alle anderen Fälle werden analog bewiesen). Wir setzen $e_i := [v_1, v_i]$ für $i = 2, \dots, 4$ und d_i , $i = 2, \dots, 4$ einen Einheitsvektor entlang der Kante e_i . Durch die C^1 -Stetigkeit über der Kante e_2 ist sowohl $p_{d_2 d_4}^{[T_2]}(v_1)$ als auch $p_{d_4 d}^{[T_2]}(v_1)$ gleich Null. Dabei ist d ein Einheitsvektor entlang der benachbarten Kante e von e_4 im Endpunkt v_1 (Für $\text{Grad}(v_1) = 3$ ist $e = e_3$, für $\text{Grad}(v_1) \in \{4, 5\}$ ist e eine in v_1 degenerierte Kante (vgl. Abbildung 6)). Mit der C^1 -Stetigkeit über der Kante e_4 folgt daraus $p_{d_4}^{[T_2]}(v_1)$. Mit analoger Argumentation wie für v_1 normal impliziert dies $p^{[T_2]} \equiv 0$.

Wir betrachten nun die Knoten v_i , $i = 1, \dots, d$ in der gegebenen Reihenfolge und zeigen $D^w p^{[T]}(v_i) = 0$ für $w = 0, \dots, 2$ und alle Dreiecke T mit Eckpunkt v_i . Sei für v_1, \dots, v_{i-1} die Aussage bereits bewiesen, dann betrachten wir die Zelle Δ_{v_i} . Sei dazu v_i im Uhrzeigersinn verbunden mit den Knoten $v_{i,j}$, $j = 1, \dots, n_i$ durch Kanten $e_{i,j} = [v_i, v_{i,j}]$, $d_{i,j}$ ein Einheitsvektor entlang der Kante $e_{i,j}$ und $T_{i,j} = \Delta(v_i, v_{i,j}, v_{i,j+1})$, $v_{i,n_i+1} = v_{i,1}$. Für einen Randknoten v_i ent falle das Dreieck T_{i,n_i} . Die Interpolationspunkte in 3.), 4.) sowie $v_{i,j_1}, v_{i,j_2} \in \Delta_s$ bzw. den Punkten in 4.) implizieren mindestens fünf Nullstellen für die univariaten Polynome $s_{|e_{i,j_1}}, s_{|e_{i,j_2}} \in \Pi_4$, und damit $s_{|e_{i,j_1}} \equiv s_{|e_{i,j_2}} \equiv 0$. Für den C^2 -Ring von v_i unterscheiden wir sechs Fälle.

Fall 1: $v_i \in V_I(\Delta)$ ist singulär;

Es gelte o.B.d.A. $T_{i,1} \in \Delta_s$ bzw. $T_{i,1}, T_{i,2} \in \Delta_s$. Mit den in 3.) und 4.) gewählten Interpolationspunkten folgt $s_{|e_{i,j}} \equiv 0$ für $j = 1, \dots, 4$, also insbesondere $p_{d_{i,j}^2}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$. Aus $p_{d_{i,1} d_{i,2}}^{[T_{i,1}]}(v_i) = 0$ folgt mit der C^1 -Stetigkeit über den in v_i degenerierten Kanten, dass $p_{d_{i,j} d_{i,j+1}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$, $j = 2, \dots, 4$. Dies impliziert

$$D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, 4, w = 0, \dots, 2.$$

Fall 2: $v_i \in V_I(\Delta)$ ist normal, $\Delta_{v_i} \cap \Delta_s \neq \emptyset$;

Es gelte o.B.d.A. $T_{i,1} \in \Delta_s$ bzw. $T_{i,1}, T_{i,2} \in \Delta_s$. Aus $p^{[T_{i,1}]} \equiv 0$ und der C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_{i,j}$ folgt $D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ für $w = 0, 1$, $j = 1, \dots, n_i$. Sei $e_{i,r}$, $r \in \{3, \dots, n_i\}$ der Pfad von v_i , dann folgt mit den Interpolationspunkten in 3.) und 4.), dass $s_{|e_{i,j}} \equiv 0$ für $j = 1, \dots, n_i$, $j \neq r$, also insbesondere $p_{d_{i,j}^2}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ für alle $j \neq r$. Die C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_{i,j}$ impliziert $p_{d_{i,j} d_{i,j+1}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ für alle $j = 1, \dots, n_i$ und damit $p_{d_{i,r}^2}^{[T_{i,r}]}(v_i) = 0$. Insgesamt ergibt sich

$$D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i, w = 0, \dots, 2.$$

Fall 3: $v_i \in V_I(\Delta)$ ist nicht normal;

Es gelte o.B.d.A. $T_{i,1} \in \Delta_s$ bzw. $T_{i,1}, T_{i,2} \in \Delta_s$. Analog Fall 2 gilt $D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ für

$w = 0, 1, j = 1, \dots, n_i$. Die Interpolationspunkte in 3.) und 4.) implizieren $s|_{e_{i,j}} \equiv 0$ für $j = 1, \dots, n_i, j \neq r$, also insbesondere $p_{d_{i,j}^2}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0, r \neq j = 1, \dots, n_i$. Aus der C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_{i,j}$ folgt $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0, j = 2, \dots, n_i$. Die C^1 -Stetigkeit über der Kante e_r , sowie $p_{d_{i,r-1}d_{i,r}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = p_{d_{i,r}d_{i,r+1}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ implizieren $p_{d_{i,r}^2}^{[T_{i,3}]}(v_i) = 0$, und damit insgesamt

$$D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i, w = 0, \dots, 2.$$

Fall 4: $v_i \in V_I(\Delta), \Delta_{v_i} \cap \Delta_s = \emptyset$;

Die Interpolationspunkte in 4.) sowie die C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_{i,j}$ implizieren $D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ für $w = 0, 1, j = 1, \dots, n_i$. Aus den Interpolationspunkten in 3.) und 4.) folgt $s|_{e_{i,j}} \equiv 0$ für $j = 1, \dots, n_i$, also insbesondere $p_{d_{i,j}^2}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$. Da $\text{Grad}(v_i)$ ungerade ist, folgt nach Lemma 2.3, dass $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0, j = 1, \dots, n$. Damit gilt

$$D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i, w = 0, \dots, 2.$$

Fall 5: $v_i \in V_B(\Delta), \Delta_{v_i} \cap \Delta_s \neq \emptyset$;

Es gelte o.B.d.A. $T_{i,1} \in \Delta_s$ bzw. $T_{i,1}, T_{i,2} \in \Delta_s$. Aus $p^{[T_{i,1}]} \equiv 0$ folgt mit der C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_{i,j}$, dass $D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ für $w = 0, 1, j = 1, \dots, n_i - 1$. Die Interpolationspunkte in 3.) und 4.) implizieren $s|_{e_{i,j}} \equiv 0, j = 1, \dots, n_i$, also insbesondere $p_{d_{i,j}^2}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0, j = 1, \dots, n_i$. Aus $p_{d_{i,1}d_{i,2}}^{[T_{i,1}]}(v_i) = 0$ folgt mit der C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_{i,j}$ schließlich, dass $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0, j = 2, \dots, n$. Somit gilt

$$D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i, w = 0, \dots, 2.$$

Fall 6: $v_i \in V_B(\Delta), \Delta_{v_i} \cap \Delta_s = \emptyset$;

Die Interpolationspunkte in 3.) und 4.) implizieren $s|_{e_{i,j}} \equiv 0, j = 1, \dots, n_i$, also insbesondere $p_{e_{i,j}^2}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0, j = 1, \dots, n_i$. Mit der C^1 -Stetigkeit im Knoten v_i folgt $D^w p^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ für $w = 0, 1$ und alle Dreiecke mit Eckpunkt v_i . Aus dem zusätzlichen Interpolationspunkt in 5.) auf $T_{i,1}$, sowie den Punkten in 4.) und den Interpolationsbedingungen in den beiden anderen Eckpunkten von $T_{i,1}$ folgt $p^{[T_{i,1}]} \equiv 0$. Der Rest des Beweises von Fall 6 verläuft analog dem Beweis von Fall 5.

Für alle Knoten $v \in V(\Delta)$ gilt damit $D^w p^{[T]}(v) = 0, w = 0, \dots, 2$ und alle Dreiecke T mit Eckpunkt v . Die impliziert $s \equiv 0$.

#

Beispiel 4.2:

Abbildung 8 zeigt eine exemplarische Triangulierung Δ mit einer Einfärbung und einer möglichen Reihenfolge der inneren Knoten. Die dick eingezeichneten Kanten entsprechen den Pfaden der Knoten von V_{in} , die markierten Punkte bilden eine Lagrangeinterpolationsmenge für den Splineraum $S_4^1(\Delta)$.

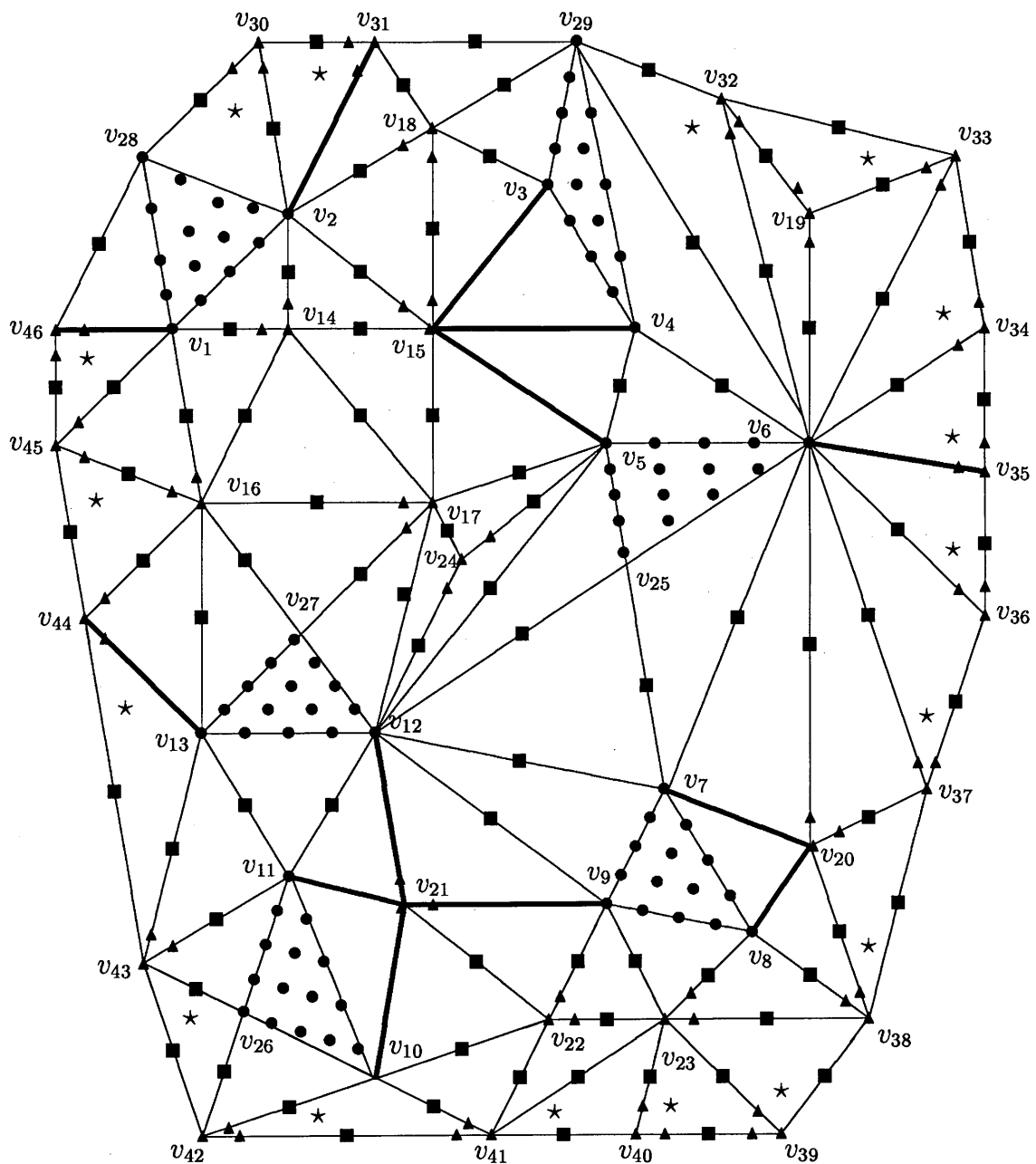


Abb. 8: Geeignete Pfade und Interpolationspunkte für eine exemplarische Triangulierung.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: An explicit basis for C^1 quartic bivariate splines, SIAM Journal of Numerical Analysis **24** (1987) 891-911.
- [2] P. Alfeld, L.L. Schumaker: The Dimension of bivariate spline spaces of smoothness r and Grad $d \geq 4r + 1$, Constructive Approximation **3** (1987) 189-197.

- [3] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness r and degree $d \geq 4r + 1$, *Computer Aided Geometric Design* **4** (1987) 105-123.
- [4] P. Alfeld, L.L. Schumaker: Non-existence of star-supported spline bases, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000) 1482-1501.
- [5] C. de Boor: *A practical guide to splines*, Springer Verlag, New York 1978.
- [6] C. de Boor: B-Form basics, in: G. Farin, (Ed.): *Geometric Modeling*, SIAM, Philadelphia 1987, 131-148.
- [7] C.K. Chui, D. Hong: Construction of local C^1 quartic spline elements for optimal-order approximation, *Mathematics of Computation* **65** (1996) 85-98.
- [8] C.K. Chui, D. Hong: Swapping edges of arbitrary triangulations to achieve the optimal order of approximation, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **34** (1997) 1472-1482.
- [9] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Cubic spline interpolation on nested polygon triangulations, in: A. Cohen, C. Rabut, L.L. Schumaker (Eds.): *Curve and Surface Fitting*, St. Malo 1999, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2000, 161-170.
- [10] O. Davydov, G. Nürnberger: Interpolation by C^1 splines of degree $q \geq 4$ on triangulations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **126** (2001) 159-183.
- [11] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constr. Approx.* **17** (2000) 181-208.
- [12] G. Farin: A modified Clough-Tocher interpolant, *CAGD* **2** (1985) 19-27.
- [13] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier Patches, *CAGD* **3** (1986) 83-127.
- [14] J. Gao: Interpolation by C^1 quartic bivariate splines, *Journal of Mathematical Research Expo.* **11** (1991) 433-442.
- [15] D. Hong: Spaces of bivariate spline functions over triangulations, *Approximation Theory and its Applications* **7** (1991) 56-75.
- [16] A. Ibrahim, L.L. Schumaker: Super spline spaces of smoothness r and degree $d \geq 3r + 2$, *Constructive Approximation* **7** (1991) 401-423.
- [17] N. Kohlmüller: *Lagrange und Hermite Interpolation mit Splineräumen auf Triangulierungen*, Doktorarbeit, Universität Mannheim 2001.
- [18] J. Morgan, R. Scott: A nodal basis for C^1 piecewise polynomials of degree $n \geq 5$, *Mathematics of Computation* **29** (1975) 736-740.
- [19] G. Nürnberger: *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin 1989.

- [20] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Lagrange and Hermite interpolation by bivariate splines, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **13** (1992) 75-96.
- [21] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in: R.H. Wang (Ed.): *Proceedings of the Morningside Institute, Peking 1998*.
- [22] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, *J. Comput. Appl. Math.* **119** (2000) 347-376.
- [23] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Developments in bivariate spline interpolation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **121** (2000), 125-152.
- [24] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by bivariate C^1 cubic splines, in: T. Lyche and L.L. Schumaker (Eds.), *Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000*, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2001, 393-404.
- [25] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by cubic splines on a class of triangulations, in: K. Kopotun, T. Lyche, M. Neamtu (Eds.): *Proc. Conf. Trends in Approximation Theory*, Vanderbilt University Press, Nashville 2001, 341-350.
- [26] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, F. Zeilfelder: Lagrange Interpolation by C^1 cubic splines on Triangulations of Separable Quadrangulations, in: C. K. Chui, L.L. Schumaker, J. Stöckler (Eds.): *Approximation Theory X: Splines, Wavelets, and Applications*, Vanderbilt University Press, Nashville 2002, 405-424.
- [27] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, F. Zeilfelder, Lagrange interpolation by C^1 cubic splines on triangulated quadrangulations, in *Erscheinung*.
- [28] L.L. Schumaker: Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **14** (1984) 251-264.
- [29] L.L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on a cell, *Computer Aided Geometric Design* **5** (1987) 277-284.